Page en cours

toutes les combinaisons possibles

Rappel : Produit cartésien : $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$

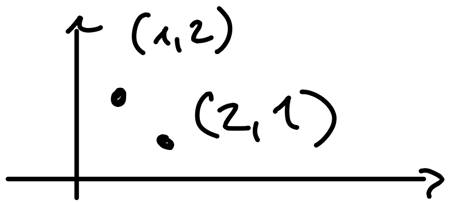
⇨ a priori $(a,b) \neq (b,a)$ ⇨ $A \times \emptyset = \emptyset$

Exemples 0.10

(i) Soient $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,4\}$

$$A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$

(ii) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



$\mathbb{R}^2$

§ 0.2 ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Notation / Définition 0.11, 0.12 & 0.13

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
$= \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$

2 choses importantes !

1- que les fractions de nombres entiers

2- tout élément $\mathbb{Q}^*$ s'écrit de façon unique sous forme de fraction irréductible

$\frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$ tq $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$.

$\mathbb{R}$ = le reste, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$

$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

<u>Théorème 0.14</u>

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

<u>Preuve</u>: Preuve par l'absurde ! (Voir exemple 0.55 polycopié)

Pour montrer qu'une propriété P est vraie, on suppose qu'elle est fausse. Puis on fait des déductions correctes jusqu'à arriver à qqch d'absurde ou évidement faux. La seule erreur possible dans le raisonnement est notre hypothèse "P est fausse" $\Rightarrow$ P est vrai

Ab absurdo, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

On peut donc écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, où $\frac{a}{b}$ est irréductible

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2$$

$\Rightarrow a^2$ est un nombre pair. Ceci implique que a est pair également (si a était impair, a^2 serait impair)

Donc, il existe $c \in \mathbb{N}$ tq $a = 2c$

$$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2 \Rightarrow b^2 = 2c^2$$

$\Rightarrow b^2$ est pair $\Rightarrow$ b est pair $\Rightarrow \frac{a}{b}$ est réductible par 2. ↯ $\rightarrow$ contradiction!

$\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

<u>Notation 0.16</u> : Symboles somme Σ, et produit Π

Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ tq $m \leq n$ et pour $k \in \mathbb{Z}$ tq $m \leq k \leq n$, $a_k \in \mathbb{R}$ un nombre réel qui peut dépendre de k.

$a(k)$

Alors,
$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Exemples 0.17

(ii) $$\sum_{k=0}^{3}(2k+1) = \underbrace{(2\cdot 0+1)}_{a_0,\ k=0} + \underbrace{(2\cdot 1+1)}_{a_1,\ k=1} + \underbrace{(2\cdot 2+1)}_{a_2,\ k=2} + \underbrace{(2\cdot 3+1)}_{a_3,\ k=3}$$

$m=0,\ n=3$

$a_k = 2k+1$

(i) $$\sum_{k=m}^{m} a_k = a_m$$

(Est-il légal d'écrire $\sum_{k=1}^{-1} a_k$ pas chez nous)

(iii) $$\sum_{k=-1}^{1} 14 = \underset{k=-1}{14} + \underset{k=0}{14} + \underset{k=1}{14} = 3\cdot 14 = 42$$

Plus généralement, $$\sum_{k=m}^{n} 14 = (n-m+1)\cdot 14$$

Que se passe-t-il avec ??

$$\sum_{k=-1}^{1} \frac{1}{k} = ? = \frac{1}{-1} + \frac{1}{0} + \frac{1}{1}$$

$$\sum_{\substack{k=-1 \\ k\neq 0}}^{1} \frac{1}{k} \rightsquigarrow \sum_{\substack{k=-2 \\ k\neq 0}}^{2} \frac{1}{k} = \sum_{k=-2}^{-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k}$$

(iv) $\prod_{k=1}^{n} k = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n = n!$

<u>Remarque 0.18</u>

Les expressions $\sum_{k=m}^{n} a_k$ & $\prod_{k=m}^{n} a_k$

ne dépendent pas de k.

On a $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{☺=m}^{n} a_{☺}$, idem pour $\prod$

<u>Proposition 0.19</u>

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $j, \ell, m, n \in \mathbb{Z}$ tq $\ell \leq m \leq n$ pour $\ell \leq k \leq n+1$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Alors

(i) $\displaystyle\sum_{k=\ell}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=\ell}^{n} a_k$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=\ell}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=\ell}^{n} a_k + \sum_{k=\ell}^{n} b_k$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=\ell}^{n} \lambda \cdot a_k = \lambda \cdot \sum_{k=\ell}^{n} a_k$ | ⚠ λ indépendant de k

n'a pas de sens

$\displaystyle\sum_{k=\ell}^{m} a_k b_k \neq a_k \sum_{k=\ell}^{m} b_k$

(v) (Changement de variables 1)

$$\sum_{k=l}^{n} a_k = \sum_{k=l-j}^{n-j} a_{k+j}$$

$j=2$

$$\sum_{k=1}^{3} (2k+1) = \sum_{k=-1}^{1} (2(k+2)+1)$$

$//$ $\quad$ $//$

$3+5+7$ $\quad$ $3+5+7$

$$\sum_{k=l}^{n} a_k = \sum_{k=l}^{n} a_{n+l-k}$$

$$\sum_{k=1}^{3} (2k+1) = 3+5+7 = 15$$

$$\sum_{k=1}^{3} (2(3+1-k)+1) = \sum_{k=1}^{3} (8-2k+1) = \sum_{k=1}^{3} (9-2k)$$

$$= (9-2\cdot 1) + (9-2\cdot 2) + (9-2\cdot 3)$$

$$= 7 + 5 + 3 = 15$$

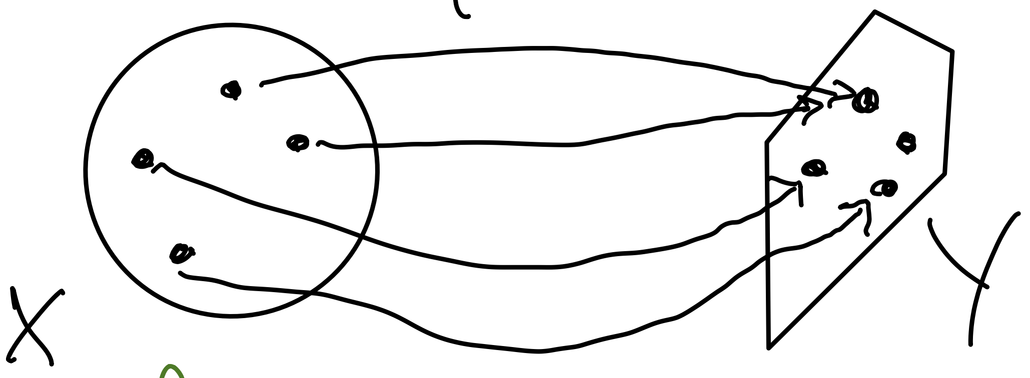
§0.3 Fonctions

Le / La "f" de "x"

Définition 0.28 Fonction

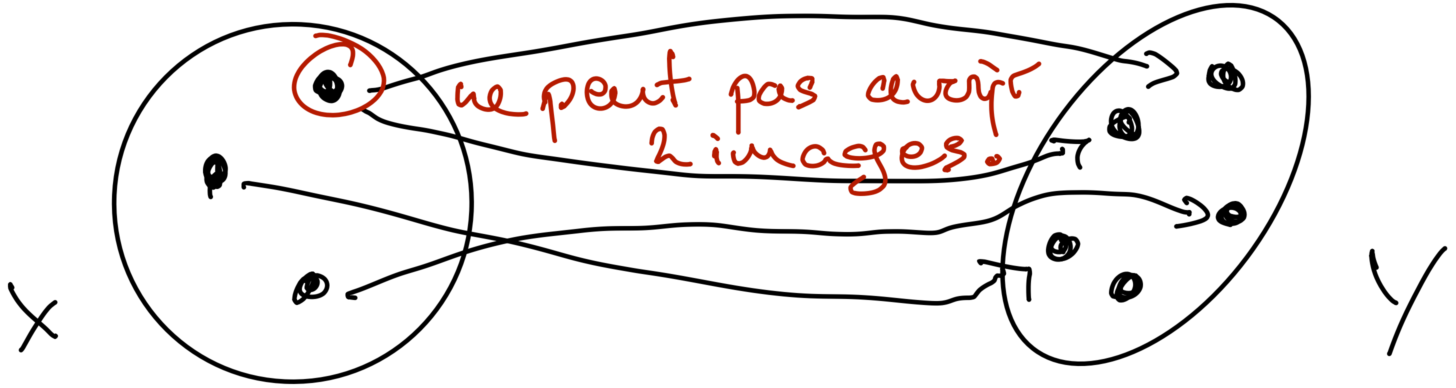
tous!

Soient X et Y des ensembles. Une fonction $f: X \to Y$ est une façon d'associer à chaque $x \in X$ un unique élément $f(x) \in Y$



est une fonction

on doit lui trouver une image



$\frac{1}{x}$ ✓ $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

✗ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

X est le <u>domaine</u> de f qu'on note aussi parfois $D(f)$,

Y est le <u>codomaine</u>

<u>Définition 0.29</u>

Soit $f : X \to Y$ une fonction, $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$.

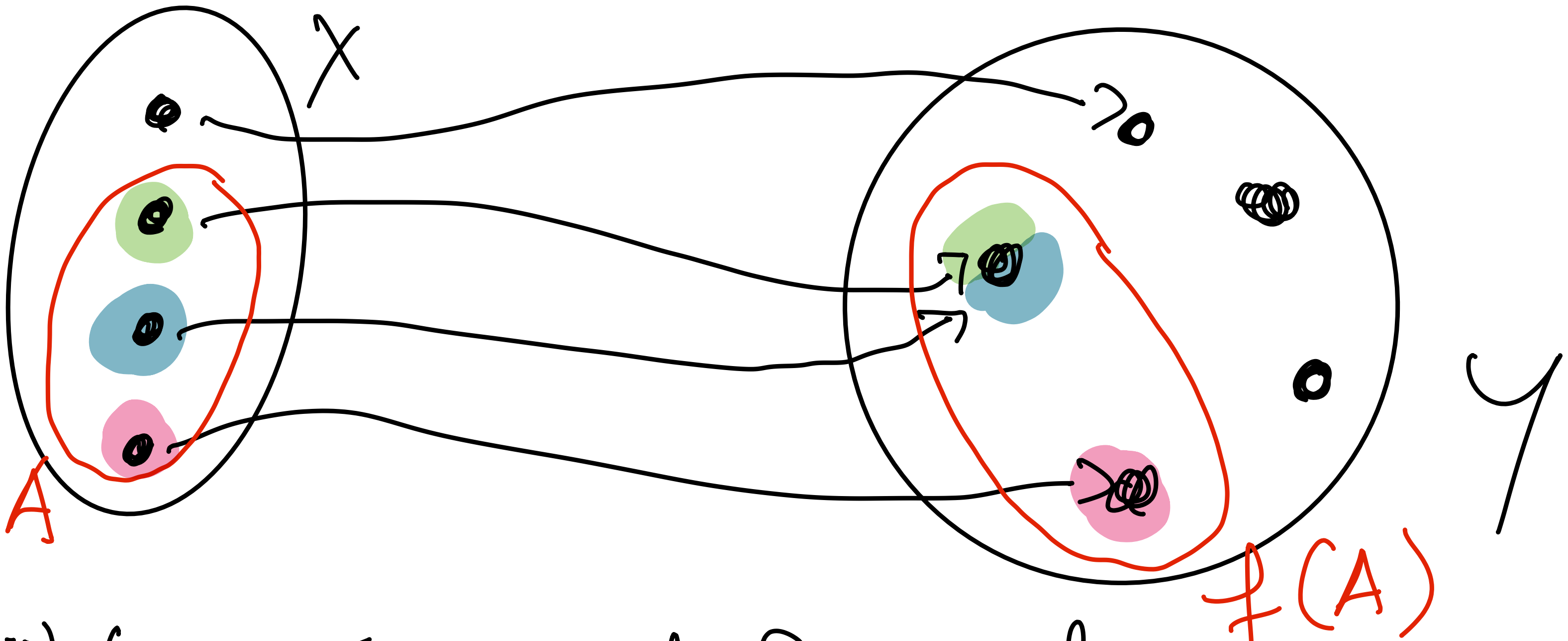
(i) <u>L'ensemble image de A</u> par f noté $f(A)$ est l'ensemble

$$f(A) = \{ f(a) : a \in A \} = \{ y \in Y : \exists\, a \in A \text{ tq } f(a) = y \}$$

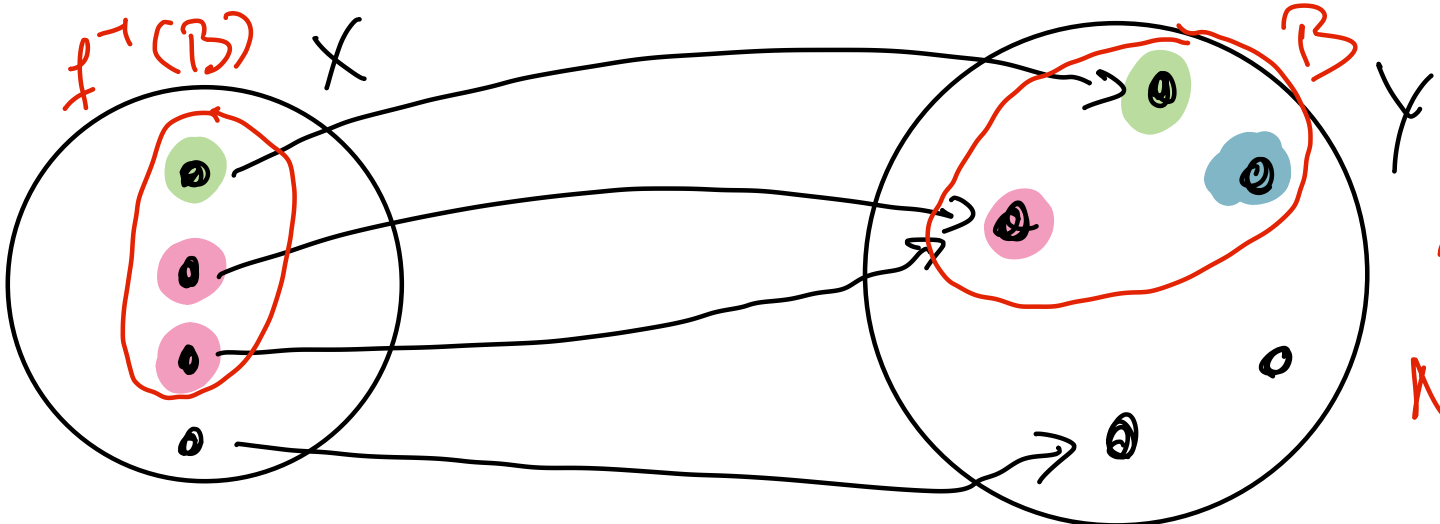
il existe

(ii) <u>L'ensemble image de f</u> noté $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble

$\mathrm{Im}(f) = f(X) = \{ f(x) : x \in X \} = \{ y \in Y : \exists x \in X \text{ tq } f(x) = y \}$



(iii) La préimage de B par f notée $f^{-1}(B)$ est l'ensemble $f^{-1}(B) = \{ x \in X : f(x) \in B \}$



⚠ écrire $f^{-1}(B)$ ne veut pas dire que f est inversible

Ne pas confondre $f(\{x\})$ & $f(x)$

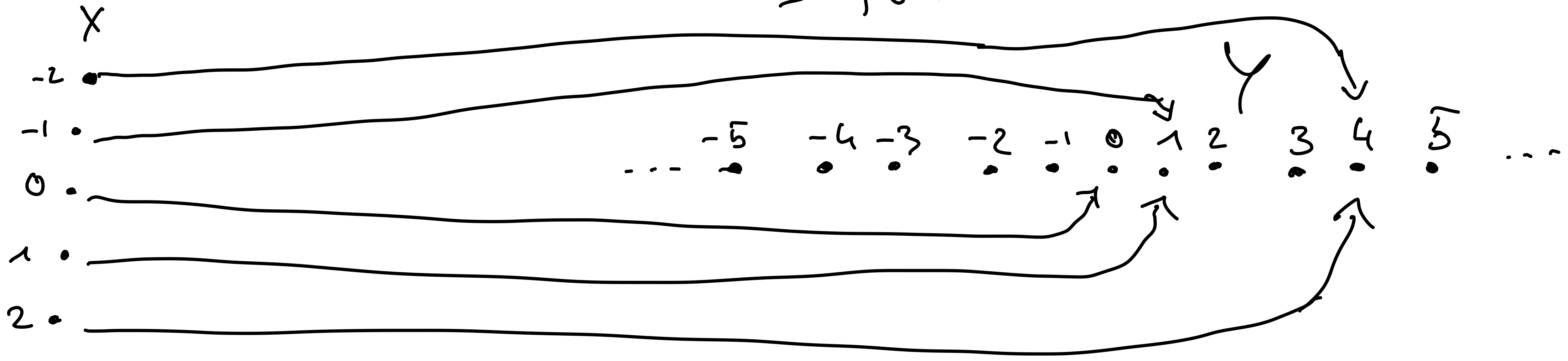
un ensemble

un élément

Exemples 0.30

(i) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$x \longmapsto f(x) = x^2$$



$$\operatorname{Im}(f) = \{4, 1, 0\} = \{0, 1, 4\}$$

$$f(\{0,1\}) = \{0, 1\}$$

$$f^{-1}(\{1,2,3\}) = \{-1, 1\}$$

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^2$

$f^{-1}(\{1,2,3\}) = \{-1, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

(iii)